Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 30 agosto 2023

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

determinandone insieme di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore o massimo e minimo. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo locali, gli intervalli di convessità e concavità e i punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Esercizio 2 Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \geq 0$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x + x^\alpha)}{x^{\frac{7}{5}}}\, dx.$$

Soluzione

Poniamo $f(x) = \dfrac{\sin(x + x^\alpha)}{x^{\frac{7}{5}}}$ e dividiamo l'intervallo di integrazione nel punto $x = 1$.
Per $x \to 0^+$ osserviamo che $(x + x^\alpha) \to 0$ per ogni $\alpha > 0$. Avremo quindi

$$\sin(x + x^\alpha) = x + x^\alpha + o(x + x^\alpha) = \begin{cases} x^\alpha + o(x^\alpha) & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ 2x + o(x) & \text{se } \alpha = 1 \\ x + o(x) & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Se $0 < \alpha < 1$ scegliamo $g(x) = \dfrac{1}{x^{\frac{7}{5} - \alpha}}$ a applichiamo il criterio del confronto asintotico, dopo aver osservato che $f(x) > 0$ se $x \in (0, 1]$. Dato che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

avremo che $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ converge se e solo se $\displaystyle\int_0^1 g(x)\, dx$ converge, quindi se e solo se $\dfrac{7}{5} - \alpha < 1$ cioè $\alpha > \dfrac{2}{5}$.

Se invece $\alpha \geq 1$ scegliamo $g(x) = \dfrac{1}{x^{\frac{2}{5}}}$ e, ragionando come prima, otteniamo che $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ converge. Resta da esaminare il caso $\alpha = 0$. In tale caso $f(x) = \dfrac{\sin(x+1)}{x^{\frac{7}{5}}}$ e, scegliendo $g(x) = \dfrac{1}{x^{\frac{7}{5}}}$, otteniamo che $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = +\infty$.

Esaminiamo ora l'andamento all'infinito. La funzione è di segno variabile, proveremo prima con la convergenza assoluta. Dato che

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x^{\frac{7}{5}}}$$

e che $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{7}{5}}}$ converge, per l criteri del confronto e della assoluta convergenza, otteniamo che anche $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, indipendentemente dal valore di α. Unendo i risultati sui due intervalli di integrazione otteniamo che $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge se $\alpha > \frac{2}{5}$ e diverge positivamente se $0 \leq \alpha \leq \frac{2}{5}$.

Esercizio 3 Dire se la successione

$$a_n = \frac{n! - n^{50} + e^n}{n^{\log n}}$$

ammette massimo o minimo.

Soluzione